Narcisa Bândă • Alin Gălățan
Cezar Lupu • Ovidiu Preda

OLIMPIADELE DE MATEMATICĂ

2006
CLASA a X-a

EDITURA GIL

Cuprins

Capitolul 1

Clasa a X-a - Enunţuri

1.1 Etapa locală

1.1.1 Alba

1. Dacă $a, b, c > 1$, demonstraţi că: $\left(\log_a \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\log_b \frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\log_c \frac{a+b}{2}\right) \geq 1$.

2. Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt[n]{(x+1)^2} + \sqrt[n]{(x-1)^2} = \frac{5}{2}\sqrt[n]{x^2-1}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sistemul: $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x^2+y^2+z^2=-4 \\ x^3+y^3+z^3=-8 \end{cases}$.

4. Se consideră $a > b > 1$, $A = \log_n(a-b)$ şi $B = \log_b(a-b)$. Să se demonstreze că dacă $a^2 + b^2 = 3ab$, atunci $A + B = 2AB$. Reciproc este adevărat? Justificaţi răspunsul.

1.1.2 Arad

1. Arătaţi că imaginile geometrice ale soluţiilor complexe ale ecuaţiei

$$(z-1)^3 - i(z+1)^3 = 0$$

sunt trei puncte coliniare.

2. a) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie ce verifică relaţia: $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$. Să se arate că f este injectivă.

   b) Fie A o mulţime finită cu cel puţin 2 elemente şi $f : A \to A$ o funcţie astfel ca $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, oricare ar fi $x, y \in A$, $x \neq y$. Demonstraţi că f nu este surjectivă.

3. Fie ABC un triunghi și M un punct aparținând lui $[BC]$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \alpha \in [0,1]$. Arătați că:

a) $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + (1-\alpha)\overrightarrow{AB}$;

b) $AM^2 = \alpha \cdot AC^2 + (1-\alpha)AB^2 - \alpha(1-\alpha)BC^2$.

4. Arătați că oricare ar fi numerele reale $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ are loc identitatea:

$$\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\ln\frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{b^2}{ca}\right)^{\ln\frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\ln\frac{a}{b}} = 1.$$

1.1.3 Argeș

1. a) Să se rezolve ecuația: $2006^{[x]} = [2006^x]$. Prin $[x]$ se întelege partea întreagă a lui x.

C. Dragomir

b) Arătați că pentru orice $x_i \in [8, 10]$, $i = \overline{1,n}$, are loc inegaliteatea:

$$\sum_{k=1}^{n} \log_{x_k}(9x_k - 40) \geq \frac{5n}{3}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Călin Burdușel și Cristinel Mortici

2. a) Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $z_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1,n}$, astfel încât $|z_1| = k!|z_k|$, oricare ar fi $k = \overline{1,n}$ și $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$. Să se arate că $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0$.

b) Fie $z_i \in \mathbb{C}$, $i = \overline{1,3}$ astfel încât

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \text{ și } |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| = |z_1 - z_2| + |z_1 - z_3|.$$

Să se arate că $z_2 + z_3 = 0$. *Ionescu Marin*

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție injectivă cu proprietatea că există $r \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $f_{r+1}(x) + f_r(x) = k$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $k \in \mathbb{Z}$, fixat, unde

$$f_r(x) = (f \circ f \circ \ldots \circ f)(x).$$

a) Demonstrați că $f(k-x) + f(k-2x) = f(k-3x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar $k \in \mathbb{Z}$, fixat.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $e^{f(x)} = 1 + x - k$.

Mațincu Gheorghe

4. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $[3\lg x] = [2\lg x]$, $x > 0$. ($[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a).

Marian Teler

b) Rezolvaţi ecuaţia: $3^{\log_2 \sqrt{x}} + [x]^{\log_2 x} = 2 + \sqrt{3}$, unde $[x]$ se înţelege partea întreagă a lui x, $x > 0$.

Jinga Daniel

1.1.4 Bacău

1. Fie a, b numere reale strict pozitive. Se consideră funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = az + b|z|$.

   a) Să se determine o condiţie necesară şi suficientă pentru ca f să fie funcţie injectivă.

   b) Considerăm cazul particular $a = 3$ şi $b = 2$. Dându-se un punct oareare B în planul complex, să se precizeze cum se poate construi cu rigla şi compasul un punct A în acelaşi plan astfel încât $f(z_A) = f(z_B)$, (z_A, z_B fiind afixele punctelor A şi B).

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x)x + \log_2(1 + 2^x)$. Să se arate că:

   a) Funcţia f este inversavilă şi $f^{-1}(x) < f(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

   b) $f(n)$ este iraţional, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. *Cornel Berceanu*

3. Fie $n \geq 2$ un întreg pozitiv. Să se calculeze: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

4. Fie $x \in \mathbb{C}$, $0 < |z| < 1$.

   a) Să se arate că există $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ cu proprietăţile:

   $$(1)\ |z_1| = |z_2| = 1 \text{ şi } (2)\ z_1 + z_2 = z.$$

   b) Dacă $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ satisfac (1) şi (2) şi dacă punctele din planul complex de afixe 0, z, z_1, z_2 sunt vârfurile unui romb, scrieţi z_1 şi z_2 în funcţie de z.

1.1.5 Bihor

1. a) Stabiliţi care dintre următoarele numere este mai mare:

   $$a = \log_9 6 \text{ sau } b = \log_{12} 8.$$

   b) Determinaţi perechile (x, y) de numere întregi care satisfac:

   $$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{x+y}{2} \\ 2^x - 2^y = y^2 - x^2 \end{cases}.$$

Lucian Dragomir, Oţelu Roşu

2. Rezolvaţi ecuaţia:

$$7^{2x}+7^{3x}+\ldots+7^{nx}+\frac{(n-1)\cdot n}{2}=7^{x}\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{2},\quad n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2.$$

Nicolae Dragomir, Tudor Deaconu, Reşiţa

3. Fie u, v, w trei numere complexe astfel încât:

$$\frac{u+v-2w}{u-v}\cdot i\in\mathbb{R} \text{ şi } \frac{w+v-2u}{w-v}\cdot i\in\mathbb{R}.$$

Arătaţi că:

a) $\dfrac{u+w-2v}{u-w}\cdot i\in\mathbb{R}$; b) $|u-v|=|v-w|+|w-u|$.

Nicolae Stăniloiu, Bocşa

4. Se consideră un cerc $\mathcal{C}$ de centru O şi ABC un triunghi oarecare în planul cercului, iar D este mijlocul laturii (BC).

a) Determinaţi un punct $M\in(AD)$ pentru care suma $S=MA^2+MB^2+MC^2$ este minimă.

b) Determinaţi un punct $N\in\mathcal{C}$ pentru care suma $T=NA^2+NB^2+NC^2$ este minimă.

Nicolae Stăniloiu, Bocşa

1.1.6 Botoşani

1. a) Dacă $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, demonstraţi că $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$.

b) Arătaţi că nu există $z_1,z_2,z_3\in\mathbb{C}$ cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|$ astfel încât

$$\frac{z_1^2+z_2^2+z_3^2}{3}=4-i-\left(z_1^2+z_2^2+z_3^2\right).$$

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a[x]+[2x]$, $a\in\mathbb{Z}^*$, unde $[.]$ este partea întreagă. Determinaţi $a\in\mathbb{Z}^*$ astfel încât f bijectivă şi $f=f^{-1}$.

3. Fie $a,b\in\mathbb{Q}^*$. Demonstraţi că dacă $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\mathbb{Q}^*$, atunci $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{b}\in\mathbb{Q}^*$.

4. Fie $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$, $\omega=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

a) Demonstraţi echivalenţa: ($\triangle ABC$ echilateral) $\Leftrightarrow$ $z_A-z_C=\omega(z_A-z_B)$ sau $z_A-z_B=\omega(z_A-z_C)$.

b) Dacă $A(1)$, $B(\varepsilon)$, $C(z_C)$, aflaţi z_C astfel încât $\triangle ABC$ să fie echilateral.

c) Pe laturile triunghiului oarecare $[MNP]$ se construiesc în exterior triunghiurile $[MPD]$, $[MNE]$, $[NPF]$. Demonstraţi cu ajutorul numerelor complexe că triunghiurile $[MNP]$ şi $[DEF]$ au acelaşi centru de greutate.

1.1.7 Brașov

1. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n \in (1, \infty)$ să se arate că:

$$a_1^{\sqrt{\log_{a_1} a_2}+\sqrt{\log_{a_1} a_3}} + a_2^{\sqrt{\log_{a_2} a_3}+\sqrt{\log_{a_2} a_4}} + \ldots + a_n^{\sqrt{\log_{a_n} a_1}+\sqrt{\log_{a_n} a_2}} \leq$$

$$\leq \frac{a_1(a_2+a_3)+a_2(a_3+a_4)+\ldots+a_n(a_1+a)2)}{2}.$$

2. a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{n^2}\right) < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right), \ n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Să se calculeze:

$$\left[\log_3\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{3^{3n}}}\right)\right], \ n \in \mathbb{N}^*$$

unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a. *Gabriela Boeriu*

3. Fie $A \subset \mathbb{C}$ și $f : A \to A$ o funcție. Definim $f_1 = f$ și $f_{k+1} = f_k \circ f$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$. Știind că există $\alpha, \beta > 0$ cu $\alpha + \beta = 1$ și $m, n \in \mathbb{N}^*$ prime între ele, astfel încât $\alpha \cdot f_m(x) + \beta \cdot f_n(x) = x$, oricare ar fi $x \in A$. Să se determine toate funcțiile f în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $A = \mathbb{N}$;

b) $(\exists)\ a \in \mathbb{C}^*,\ p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A = \{z = \mathbb{C} \mid z^p = a\}$. *Romeo Ilie*

4. Fie $a \in [-3, 3]$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \sin y + \sin z = 0$ și $\cos x + \cos y + \cos z = a$.

a) Pentru $a \neq 0$ și

$$\sin(x+y)+\sin(y+z)+\sin(x+z) = \cos(x+y)+\cos(y+z)+\cos(x+z),$$

calculați $x + y + z$.

b) Pentru $a = 0$, arătați că

$$\sin 2006x + \sin 2006y + \sin 2006z = \cos 2006x + \cos 2006y + \cos 2006z.$$

Traian Duţă

1.1.8 Brăila

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt[3]{3\cdot 2^x - 6} + \sqrt[3]{2\cdot 2^x - 4} = \sqrt[3]{3\cdot 2^x - 4} + \sqrt[3]{2\cdot 2^x - 6}$.

2. Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care:

$|a|^n + |b|^n + |c|^n + |a+b+c|^n = |a+b|^n + |a+c|^n + |b+c|^n$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{C}$.

Dan Negulescu