

**LBRIS**

We know  
books

**Narcisa Bândă • Alin Gălățan  
Cezar Lupu • Ovidiu Preda**

**OLIMPIADELE  
DE  
MATEMATICĂ**

**2006  
CLASA a X-a**

**EDITURA GIL**

# Cuprins

<b>1 Clasa a X-a - Enunțuri</b>	<b>11</b>
1.1 Etapa locală	11
1.1.1 Alba	11
1.1.2 Arad	11
1.1.3 Argeș	12
1.1.4 Bacău	13
1.1.5 Bihor	13
1.1.6 Botoșani	14
1.1.7 Brașov	15
1.1.8 Brăila	15
1.1.9 București	16
1.1.10 Buzău	16
1.1.11 Caraș-Severin	17
1.1.12 Călărași	17
1.1.13 Cluj	18
1.1.14 Constanța	18
1.1.15 Dâmbovița	19
1.1.16 Dolj	19
1.1.17 Galați	20
1.1.18 Giurgiu	20
1.1.19 Harghita	21
1.1.20 Hunedoara	21
1.1.21 Iași	22
1.1.22 Maramureș	22
1.1.23 Mehedinți	23
1.1.24 Neamț	23
1.1.25 Olt	24
1.1.26 Prahova	24
1.1.27 Sălaj	25
1.1.28 Sibiu	25

1.1.29	Suceava . . . . .	26
1.1.30	Teleorman . . . . .	26
1.1.31	Vaslui . . . . .	26
1.1.32	Vâlcea . . . . .	27
1.1.33	Vrancea . . . . .	27
1.2	Etapa județeană și a municipiului București . . . . .	28
1.3	Etapa națională . . . . .	28
1.4	Probleme avute în atenția comisiei de selecție . . . . .	29
1.5	Concursuri interjudețene . . . . .	31
1.5.1	"Acad. Radu Miron", Vaslui, 2005 . . . . .	31
1.5.2	"Gheorghe Vrânceanu", Bacău, 1-4.12.2005 . . . . .	31
1.5.3	"Unirea 2006", Focșani, 28.01.2006 . . . . .	32
1.5.4	"Mathematica-Modus Vivendi", Rm. Vâlcea, 25.02.2006 . . . . .	32
1.5.5	"Grigore C. Moisil", Bistrița, martie 2006 . . . . .	32
1.5.6	Nicolae Coculescu . . . . .	33
1.5.7	Gheorghe Țițeica . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Clasa a X-a - Soluții</b> . . . . .	<b>35</b>
2.1	Etapa locală . . . . .	35
2.1.1	Alba . . . . .	35
2.1.2	Arad . . . . .	36
2.1.3	Argeș . . . . .	37
2.1.4	Bacău . . . . .	39
2.1.5	Bihor . . . . .	40
2.1.6	Botoșani . . . . .	41
2.1.7	Brașov . . . . .	42
2.1.8	București . . . . .	45
2.1.9	Buzău . . . . .	46
2.1.10	Caras-Severin . . . . .	47
2.1.11	Călărași . . . . .	48
2.1.12	Cluj . . . . .	49
2.1.13	Constanța . . . . .	50
2.1.14	Dolj . . . . .	51
2.1.15	Galați . . . . .	52
2.1.16	Giurgiu . . . . .	53
2.1.17	Harghita . . . . .	54
2.1.18	Hunedoara . . . . .	56
2.1.19	Iași . . . . .	56
2.1.20	Maramureș . . . . .	58
2.1.21	Mehedinți . . . . .	59
2.1.22	Neamț . . . . .	60

2.1.23	Prahova . . . . .	61
2.1.24	Sălaj . . . . .	62
2.1.25	Sibiu . . . . .	64
2.1.26	Suceava . . . . .	65
2.1.27	Teleorman . . . . .	67
2.1.28	Vaslui . . . . .	68
2.1.29	Vâlcea . . . . .	69
2.1.30	Vrancea . . . . .	71
2.2	Etapa județeană și a municipiului București . . . . .	72
2.3	Etapa națională . . . . .	75
2.4	Probleme avute în atenția comisiei de selecție . . . . .	78
2.5	Concursuri interjudețene . . . . .	84
2.5.1	”Acad. Radu Miron”, Vaslui, 2005 . . . . .	84
2.5.2	”Gheorghe Vrânceanu”, Bacău, 1-4.12.2005 . . . . .	85
2.5.3	”Unirea 2006”, Focșani, 28.01.2006 . . . . .	86
2.5.4	”Mathematica-Modus Vivendi”, Rm. Vâlcea, 25.02.2006 . . . . .	89
2.5.5	”Grigore C. Moisil”, Bistrița, martie 2006 . . . . .	91
2.5.6	Nicolae Coculescu . . . . .	92
2.5.7	Gheorghe Țițeica . . . . .	96

# Capitolul 1

## Clasa a X-a - Enunțuri

### 1.1 Etapa locală

#### 1.1.1 Alba

1. Dacă  $a, b, c > 1$ , demonstrați că:  $\left(\log_a \frac{b+c}{2}\right) \cdot \left(\log_b \frac{c+a}{2}\right) \cdot \left(\log_c \frac{a+b}{2}\right) \geq 1$ .

2. Rezolvați ecuația:  $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2} = \frac{5}{2} \sqrt[3]{x^2-1}$ .

3. Rezolvați în  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  sistemul: 
$$\begin{cases} x + y + z = -2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = -4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -8 \end{cases} .$$

4. Se consideră  $a > b > 1$ ,  $A = \log_n(a-b)$  și  $B = \log_b(a-b)$ . Să se demonstreze că dacă  $a^2 + b^2 = 3ab$ , atunci  $A + B = 2AB$ . Reciproc este adevărat? Justificați răspunsul.

#### 1.1.2 Arad

1. Arătați că imaginile geometrice ale soluțiilor complexe ale ecuației

$$(z-1)^3 - i(z+1)^3 = 0$$

sunt trei puncte coliniare.

2. a) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție ce verifică relația:  $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$ , oricare ar fi  $x, y \in \mathbb{R}$ . Să se arate că  $f$  este injectivă.

b) Fie  $A$  o mulțime finită cu cel puțin 2 elemente și  $f : A \rightarrow A$  o funcție astfel ca  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , oricare ar fi  $x, y \in A$ ,  $x \neq y$ . Demonstrați că  $f$  nu este surjectivă.

3. Fie  $ABC$  un triunghi și  $M$  un punct aparținând lui  $[BC]$  astfel încât  $\frac{BM}{BC} = \alpha \in [0, 1]$ . Arătați că:

a)  $\overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \overrightarrow{AC} + (1 - \alpha)\overrightarrow{AB}$ ;

b)  $AM^2 = \alpha \cdot AC^2 + (1 - \alpha)AB^2 - \alpha(1 - \alpha)BC^2$ .

4. Arătați că oricare ar fi numerele reale  $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$  are loc identitatea:

$$\left(\frac{a^2}{bc}\right)^{\ln \frac{b}{c}} \cdot \left(\frac{b^2}{ca}\right)^{\ln \frac{c}{a}} \cdot \left(\frac{c^2}{ab}\right)^{\ln \frac{a}{b}} = 1.$$

### 1.1.3 Argeș

1. a) Să se rezolve ecuația:  $2006^{[x]} = [2006^x]$ . Prin  $[x]$  se înțelege partea întreagă a lui  $x$ .

*C. Dragomir*

b) Arătați că pentru orice  $x_i \in [8, 10]$ ,  $i = \overline{1, n}$ , are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^n \log_{x_k}(9x_k - 40) \geq \frac{5n}{3}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

*Călin Burdușel și Cristinel Mortici*

2. a) Fie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  și  $z_k \in \mathbb{C}$ ,  $k = \overline{1, n}$ , astfel încât  $|z_1| = k|z_k|$ , oricare ar fi  $k = \overline{1, n}$  și  $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ . Să se arate că  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = 0$ .

b) Fie  $z_i \in \mathbb{C}$ ,  $i = \overline{1, 3}$  astfel încât

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \text{ și } |z_1 + z_2| + |z_1 + z_3| = |z_1 - z_2| + |z_1 - z_3|.$$

Să se arate că  $z_2 + z_3 = 0$ .

*Ionescu Marin*

3. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție injectivă cu proprietatea că există  $r \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $f_{r+1}(x) + f_r(x) = k$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , iar  $k \in \mathbb{Z}$ , fixat, unde

$$f_r(x) = (f \circ f \circ \dots \circ f)(x).$$

a) Demonstrați că  $f(k - x) + f(k - 2x) = f(k - 3x)$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ , iar  $k \in \mathbb{Z}$ , fixat.

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $e^{f(x)} = 1 + x - k$ .

*Mașincu Gheorghe*

4. a) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:  $[3 \lg x] = [2 \lg x]$ ,  $x > 0$ . ( $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ ).

*Marian Teler*

b) Rezolvați ecuația:  $3^{\log_2 \sqrt{x}} + |x|^{\log_2 x} = 2 + \sqrt{3}$ , unde  $[x]$  se înțelege partea întreagă a lui  $x$ ,  $x > 0$ .

Jinga Daniel

### 1.1.4 Bacău

1. Fie  $a, b$  numere reale strict pozitive. Se consideră funcția  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definită prin  $f(z) = az + b|z|$ .

a) Să se determine o condiție necesară și suficientă pentru ca  $f$  să fie funcție injectivă.

b) Considerăm cazul particular  $a = 3$  și  $b = 2$ . Dându-se un punct oarecare  $B$  în planul complex, să se precizeze cum se poate construi cu rigla și compasul un punct  $A$  în același plan astfel încât  $f(z_A) = f(z_B)$ , ( $z_A, z_B$  fiind afixele punctelor  $A$  și  $B$ ).

2. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = x + \log_2(1 + 2^x)$ . Să se arate că:

a) Funcția  $f$  este inversabilă și  $f^{-1}(x) < f(x)$ , oricare ar fi  $x \in \mathbb{R}$ .

b)  $f(n)$  este irațional, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Cornel Berceanu

3. Fie  $n \geq 2$  un întreg pozitiv. Să se calculeze:  $\sum_{k=1}^n k \cdot \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ .

4. Fie  $x \in \mathbb{C}$ ,  $0 < |z| < 1$ .

a) Să se arate că există  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  cu proprietățile:

$$(1) |z_1| = |z_2| = 1 \text{ și } (2) z_1 + z_2 = z.$$

b) Dacă  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  satisfac (1) și (2) și dacă punctele din planul complex de afixe  $0, z, z_1, z_2$  sunt vârfurile unui romb, scrieți  $z_1$  și  $z_2$  în funcție de  $z$ .

### 1.1.5 Bihor

1. a) Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mare:

$$a = \log_9 6 \text{ sau } b = \log_{12} 8.$$

b) Determinați perechile  $(x, y)$  de numere întregi care satisfac:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \frac{x+y}{2} \\ 2^x - 2^y = y^2 - x^2 \end{cases}.$$

Lucian Dragomir, Oțelu Roșu

$$7^{2x} + 7^{3x} + \dots + 7^{nx} + \frac{(n-1) \cdot n}{2} = 7^x \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq 2.$$

Nicolae Dragomir, Tudor Deaconu, Reșița

3. Fie  $u, v, w$  trei numere complexe astfel încât:

$$\frac{u+v-2w}{u-v} \cdot i \in \mathbb{R} \text{ și } \frac{w+v-2u}{w-v} \cdot i \in \mathbb{R}.$$

Arătați că:

a)  $\frac{u+w-2v}{u-w} \cdot i \in \mathbb{R}$ ;    b)  $|u-v| = |v-w| + |w-u|$ .

Nicolae Stăniloiu, Bocșa

4. Se consideră un cerc  $\mathcal{C}$  de centru  $O$  și  $ABC$  un triunghi oarecare în planul cercului, iar  $D$  este mijlocul laturii  $(BC)$ .

a) Determinați un punct  $M \in (AD)$  pentru care suma  $S = MA^2 + MB^2 + MC^2$  este minimă.

b) Determinați un punct  $N \in \mathcal{C}$  pentru care suma  $T = NA^2 + NB^2 + NC^2$  este minimă.

Nicolae Stăniloiu, Bocșa

### 1.1.6 Botoșani

1. a) Dacă  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , demonstrați că  $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ .

b) Arătați că nu există  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  cu  $|z_1| = |z_2| = |z_3|$  astfel încât

$$\frac{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}{3} = 4 - i - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2).$$

2. Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + a[x] + [2x]$ ,  $a \in \mathbb{Z}^*$ , unde  $[.]$  este partea întreagă. Determinați  $a \in \mathbb{Z}^*$  astfel încât  $f$  bijectivă și  $f = f^{-1}$ .

3. Fie  $a, b \in \mathbb{Q}^*$ . Demonstrați că dacă  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}^*$ , atunci  $\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{b} \in \mathbb{Q}^*$ .

4. Fie  $A(z_A), B(z_B), C(z_C)$ ,  $\omega = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

a) Demonstrați echivalența:  $(\triangle ABC \text{ echilateral}) \Leftrightarrow z_A - z_C = \omega(z_A - z_B)$  sau  $z_A - z_B = \omega(z_A - z_C)$ .

b) Dacă  $A(1), B(\varepsilon), C(z_C)$ , aflați  $z_C$  astfel încât  $\triangle ABC$  să fie echilateral.

c) Pe laturile triunghiului oarecare  $[MNP]$  se construiesc în exterior triunghiurile  $[MPD], [MNE], [NPF]$ . Demonstrați cu ajutorul numerelor complexe că triunghiurile  $[MNP]$  și  $[DEF]$  au același centru de greutate.

### 1.1.7 Braşov

We know

1. Dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$  să se arate că:

$$\begin{aligned} & a_1^{\sqrt{\log_{a_1} a_2} + \sqrt{\log_{a_1} a_3}} + a_2^{\sqrt{\log_{a_2} a_3} + \sqrt{\log_{a_2} a_4}} + \dots + a_n^{\sqrt{\log_{a_n} a_1} + \sqrt{\log_{a_n} a_2}} \leq \\ & \leq \frac{a_1(a_2 + a_3) + a_2(a_3 + a_4) + \dots + a_n(a_1 + a_2)}{2}. \end{aligned}$$

2. a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2} \right) < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2} \left( \sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Să se calculeze:

$$\left[ \log_3 \left( 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{33n}} \right) \right], \quad n \in \mathbb{N}^*$$

unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a lui  $a$ .

*Gabriela Boeriu*

3. Fie  $A \subset \mathbb{C}$  și  $f : A \rightarrow A$  o funcție. Definim  $f_1 = f$  și  $f_{k+1} = f_k \circ f$ , oricare ar fi  $k \in \mathbb{N}^*$ . Știind că există  $\alpha, \beta > 0$  cu  $\alpha + \beta = 1$  și  $m, n \in \mathbb{N}^*$  prime între ele, astfel încât  $\alpha \cdot f_m(x) + \beta \cdot f_n(x) = x$ , oricare ar fi  $x \in A$ . Să se determine toate funcțiile  $f$  în fiecare dintre următoarele cazuri:

a)  $A = \mathbb{N}$ ;

b)  $(\exists) a \in \mathbb{C}^*, p \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = a\}$ .

*Romeo Ilie*

4. Fie  $a \in [-3, 3]$  și  $x, y, z \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\sin x + \sin y + \sin z = 0$  și  $\cos x + \cos y + \cos z = a$ .

a) Pentru  $a \neq 0$  și

$$\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = \cos(x+y) + \cos(y+z) + \cos(x+z),$$

calculați  $x + y + z$ .

b) Pentru  $a = 0$ , arătați că

$$\sin 2006x + \sin 2006y + \sin 2006z = \cos 2006x + \cos 2006y + \cos 2006z.$$

*Traian Duță*

### 1.1.8 Brăila

1. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația:  $\sqrt[3]{3 \cdot 2^x - 6} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^x - 4} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^x - 4} + \sqrt[3]{2 \cdot 2^x - 6}$ .

2. Să se determine  $n \in \mathbb{N}^*$  pentru care:

$$|a|^n + |b|^n + |c|^n + |a+b+c|^n = |a+b|^n + |a+c|^n + |b+c|^n, \text{ oricare ar fi } a, b, c \in \mathbb{C}.$$

*Dan Negulescu*